ALGEBRA
Terme 2

Termumformungen

Binomische Formeln

Meistens in Klasse 8

Datei Nr. 12102

Friedrich W. Buckel

Stand: 10. August 2018

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

Diese Texte zu Termen gibt es in … Mathematik-CD

12101	Äquivalente Terme: Klam… multiplizieren
12101A	Aufgabenblätter zu 12101
12102:	Binomische Form…
12103:	Faktorisieren … Quadratische Erga…ng
12104:	Faktorisi… mit beliebi… Klammern
12105:	Berechnu… …n $(a …$ mit Pascalschem Dreieck sowie $(a+b+c)^2$
12106	Binomialkoeffi…
12107	…hen
1210…	Zur Wiede…ung: Gr…en kompakt
1…	Zur Wiederho…g: Grundlagentest (Was weiß ich noch?)
1211…	Bruchterme: D…nitionsbereich, kürzen und erweitern
12111	Bruchterme: …., Subtr., Mult. und Division von Bruchtermen
12112	…aben…mlung aus 12110 und 12111
12115	Divis… durch 0
12116:	Polynomdivision
12141	Tests mit Term-Aufgaben

6 Binomische Formeln

6.1 Multiplikation von Klammertermen

Eine Grundfähigkeit in der Algebra ist das Multiplizieren von Klammertermen.

$$(a+b)(c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Diese Regel wird im Text 12101 auf Seite 15 erklärt. Dort wird auch bewiesen, warum sie so aussieht.

Man bildet also vier Produkte: Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.

Beispiel 1: $(x+2)\cdot(x+5) = x^2+5x+2x+10 = x^2+7x+10$

Beispiel 2: $(a+1)(b+2) = ab+2a+b+2$

Beispiel 3: $(2a+3b)(6a-4b) = 2a\cdot 6a + 2a\cdot(-4b) + 3b\cdot 6a + 3b\cdot(-4b)$

oder schneller so: $(2a+3b)(6a-4b) = 2a\cdot 6a - 2a\cdot 4b + 3b\cdot 6a - 3b\cdot 4b$

$= 12a^2 - 8ab + 18ba - 12b^2 = 12a^2 + 10ab - 12b^2$

Man sieht also, dass man die Formel auch anwenden kann, wenn eine Klammer ein Minuszeichen enthält.

Mehr Übungen dazu im Text 12101 ab Seite [illegible].

Es gibt beim Multiplizieren zweier Klammern drei Sonderfälle:

1. $(a+b)(a+b)$ oder kürzer $(a+b)^2$ mit zwei gleichen Klammern
2. $(a-b)\cdot(a-b)$ oder kürzer $(a-b)^2$ mit zwei gleichen Klammern
3. $(a+b)(a-b)$

Alle drei Aufgaben haben ein leicht zu merkendes Ergebnis, mit dem man schnell arbeiten kann, ohne die obige Klammerregel anwenden zu müssen-

Man nennt sie die **binomischen Formeln**.

Weil sie so wichtig sind, sollte man sie auch herleiten können und nicht nur wissen, wie sie aussehen. Das kommt jetzt.

6.2 Die 1. Binomische Formel

Herleitung der Formel

Es geht um die Berechnung des Terms $(a+b)^2$, der ja eigentlich $(a+b)(a+b)$ heißt. Wir wenden die Methode an, die man zur Multiplikation von Klammern immer anwendet:

$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

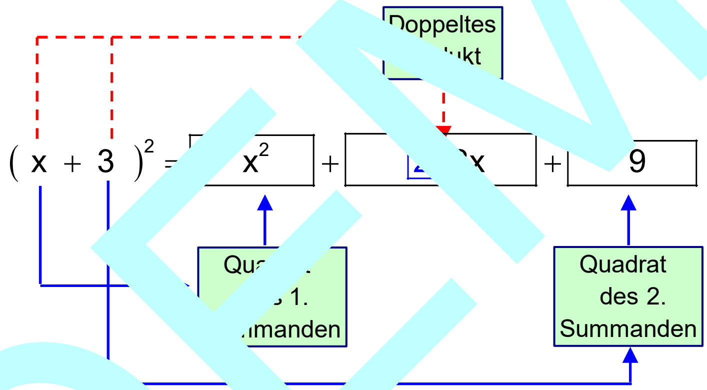
Das war schon alles. Daher merken wir uns:

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

In Worten: a und b werden jeweils quadriert, also $a^2 + b^2$. Manche hören hier auf und vergessen, dass es einen dritten Summanden gibt: + 2ab, das **doppelte Produkt**!

Beispiele:

(a) $(x+3)^2 = x^2 + \boxed{2}\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$



(b) $(3x+5)^2 = (3x)^2 + \boxed{2}\cdot 3x\cdot 5 + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

Erklärung: Jetzt heißt es 3x statt a, also ist $a^2 = (3x)^2 = 9x^2$.
Dann kommt das doppelte Produkt, also 3x mal 5 und das Ganze doppelt genommen, also nochmals mal 2, ergibt 30x.
Schließlich ist b = 5 also $b^2 = 25$.

Man kann diese Formel auch mit großen Platzhaltern darstellen:

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2\cdot\square\bigcirc + \bigcirc^2$$

Mit diesem Schema gelingt es kompliziertere Terme umzurechnen:

(c) $(5a+7b)^2 = ?$ Versuche es selbst!

Schreibe die Summanden in unser Schema!

$$\left(\boxed{5a} + 7b\right)^2 = \boxed{5a}^2 + 2\cdot\boxed{5a}\cdot 7b + (7b)^2$$
$$= 25a^2 + 70\cdot ab + 49b^2$$

Dieses Schema hilft, wenn Schüler durcheinander kommen, weil es in der binomischen Formel $(a+b)^2$ heißt, und hier steht plötzlich $(5a+7b)^2$.

Das a und das b in der Formel sind nur Platzhalter für den 1. und 2. Summanden des zu berechnenden Terms.

(d) $(3+2z)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2z + (2z)^2 = 9 + 12z + 4z^2$

(e) $(3y+12x)^2 = (3y)^2 + 2\cdot 3y\cdot 12x + (12x)^2 = 9y^2 + 72xy + 144x^2$.

(f) $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2\right)^2 + 2\cdot x^2\cdot y^2 + \left(y^2\right)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$

(g) $\left(4x^2+5\right)^2 = \left(4x^2\right)^2 + 2\cdot 4x^2\cdot 5 + 5^2 = 16x^4 + 40x^2 + 25$

(h) $\left(3x+8x^2\right)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 8x^2 + \left(8x^2\right)^2 = 9x^2 + 48x^3 + 64x^4$

(i) $\left(x^2y+xy^2\right)^2 = \left(x^2y\right)^2 + 2\cdot x^2y\cdot xy^2 + \left(xy^2\right)^2 = x^4y^2 + 2x^3y^3 + x^2y^4$

denn $\left(x^2y\right)^2 = \left(x^2y\right)\cdot\left(x^2y\right) = x^2\cdot x^2\cdot y\cdot y = x^4\cdot y^2$ usw.

j) $\left(15x^3+16x^5\right)^2 = \left(15x^3\right)^2 + 2\cdot 15x^3\cdot 16x^5 + \left(16x^5\right)^2 = 225x^6 + 480\,x^8 + 256\,x^{10}$

denn $\left(x^3\right)^2 = x^3\cdot x^3 = (x\cdot x\cdot x)\cdot(x\cdot x\cdot x) = x^6$ usw.

Trainingsaufgabe 1

Wende die 1. binomische Formel an:

(a)	$(m+n)^2$	(b)	$(3a+4b)^2$	(c)	$(7x+15)^2$
(d)	$(5c+6d)^2$	(e)	$(15x+4y)^2$	(f)	$\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2$
(g)	$\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2$	(h)	$\left(8b+\frac{1}{16}a\right)^2$	(i)	$\left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)^2$

Lösung einige Seiten weiter.

6.3 Die 2. Binomische Formel

Es geht um die Berechnung des Terms $(a-b)^2$, der ja eigentlich $(a-b)(a-b)$ heißt. Wir wenden wieder die Methode an, die man zur Multiplikation von Klammern immer anwendet und erhält:

$$(a-b)(a-b) = a^2 + a\cdot(-b) + (-b)\cdot a + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Das war schon alles. Daher merken wir uns:

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

In Worten: a und b werden jeweils quadriert, also $a^2 +$ [illegible] Manche hören h[illegible] auf und vergessen, dass es einen dritten Summanden gibt: - 2[illegible] Man nennt ihn [illegible]s **doppelte Produkt**! Dieses wird hier subtrahiert, [illegible] es au[illegible] $a-b$ heißt.

Beispiele

(a) $(4x-1)^2 = (4x)^2 - 2\cdot 4x\cdot 1 + 1^2 =$ [illegible] $-8x+1$

(b) $(4a-9b)^2 = (4a)^2 - 2\cdot 4a$ [illegible] $+(9b)$ [illegible] $16a$ [illegible] $81b^2$

(c) $(3x-5y)^2 = (3x)^2 -$ [illegible] $3x\cdot 5y + (5y)^2 = 9x$ [illegible] $30xy + 25y^2$

(d) $(x^2-4)^2 = (x^2)^2 -$ [illegible] $^2\cdot 4$ [illegible] $= x^4 - 8x^2$ [illegible] 16

(e) $(3x^2 -$ [illegible] $)^2 - 2\cdot$ [illegible] $\cdot 5x +$ [illegible] $= 9x^4 - 30x^3 + 25x^2$

(f) [illegible] $-8z)^2 = 100 - 1$ [illegible] $+64z^2$ Dies war jetzt ohne Zwischenrechnung!

(g) $(3ab$ [illegible] $2a^2b)^2 = 9a^2b$ [illegible] $-12\,a^3b^3 + 4a^4b^2$

Trainingsaufgabe 2

Wende die 2. binomische Formel an:

(a)	$(5a-c)^2$	(b)	$(7a-2b)^2$	(c)	$(20x-25)^2$
(d)	$(ab-4)^2$	(e)	$(-2-4a)^2$	(f)	$\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b\right)^2$
(g)	$\left(4x-\frac{1}{4}\right)^2$	(h)	$\left(\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v\right)^2$	(i)	$\left(\frac{2}{3}x^2-6\right)^2$

Lösung einige Seiten weiter.

6.4 Die 3. Binomische Formel

Es geht um die Berechnung des Terms $(a+b)(a-b)$. Wir wenden wieder die Methode an, die man zur Multiplikation von Klammern immer anwendet und erhält:

$$(a+b)(a-b)=a^2+a\cdot(-b)+b\cdot a+b\cdot(-b)=a^2\boxed{-ab+ab}-b^2=a^2-b^2$$

Das war schon alles. Daher merken wir uns:

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Jetzt gibt es also kein doppeltes Produkt, denn die gemischten Produkte „ab“ und „ba“ fallen weg!

Beispiele

(a) $(3a+2b)(3a-2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$

(b) $(3a-2b)(3a+2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$

Hast du entdeckt, dass die Aufgabe (a) identisch zu (b) ist? Es ist egal, ob die Klammer mit dem Minuszeichen die erste oder die zweite Klammer ist!

(c) $(8x-3)(8x+3)=(8x)^2-3^2=64x^2-9$

(d) $(4x-5)(5+4x)$ Achtung, jetzt muss man genauer hinsehen, denn die Klammern unterscheiden sich nicht nur um das Minuszeichen. Auch die Reihenfolge der Summanden ist anders. Daher muss man dies zuerst ändern. Man darf dies aber nur in der „Plus-Klammer“ tun, denn dort gilt 5 + 4x = 4x + 5:

$(4x-5)(5+4x)=(4x-5)(4x+5)=(4x)^2-5^2=16x^2-25$

(e) Vorsicht Falle: $(3x-4z)(3z+4x)$

Diese Aufgabe passt NICHT zur 3. binomischen Formel, denn in der zweiten Klammer stehen andere Summanden. Um die 3. binomische Formel anwenden zu können, müsste die Aufgabe so heißen:

$(3x-4z)(3x+4z)=9x^2-16z^2$. Jetzt wurde auch wieder der Zwischenschritt weggelassen. Man macht ihn meistens im Kopf.

(f) $(x^2-3)(x^2+3)=(x^2)^2-3^2=x^4-9$

(g) $(7p+4q)(4q-7p)=(4q+7p)(4q-7p)=16q^2-49p^2$

(h) $(xy-xz)(yx+zx)=(xy-xz)(xy+xz)=(xy)^2-(xz)^2=x^2y^2-x^2z^2$

Trainingsaufgabe 3

(a)	$(c-d)(c+d)$	(b)	$(3a-2b)(3a+2b)$	(c)	$(5x+1)(5x-1)$
(d)	$(4a-\frac{1}{2})(4a+\frac{1}{2})$	(e)	$(a^2-b)(a^2+b)$	(f)	$(4-x^2)(x^2+4)$
(g)	$(\frac{1}{2}x+3)(\frac{1}{2}x-3)$	(h)	$(-8u-v)(-8u+v)$	(i)	$(6+2x)(-6+2x)$

6.5 Teuflische Minuszeichen

(für ganz bösartige Aufgaben)

Es gibt Terme, die nicht so richtig zu einer binomischen Formel passen, aber nach einer kleinen Umformung dann doch dafür geeignet sind. Dies liegt dann am Vorzeichen.

Dazu wichtige Vorübungen:

Wenn man in einer Differenz die beiden Zahlen vertauscht, dann ändert sich das Vorzeichen des Ergebnisses:

5 – 3 = 2 aber 3 – 5 = - 2

12 – 5 = 7 aber 5 – 12 = [illegible]

Als nächstes sehen wir uns folgende Rechnungen a[illegible]

$$-(5-3) = -5+3$$

$$-(12-5) = -12+5$$

Hier wird die vor der Klammer stehende Zahl [illegible] 1 ([illegible] 1 muss man nicht schreiben) in die Klammer hineinmultipliziert.

Lesen wir die beiden letzten Gleichungen von rechts nach links, dann erhalten wir:

$$-5+3 = -(5-3)$$

$$-12+5 = -(12-5)$$

Diese Gleichungen [illegible] uns:

Klammert man ein Minuszeichen aus, dann ändert [illegible] Vorzeichen in der Klammer.

Anwendung

a) $(-5+3)(5+3)$

Für die 3. binomische Formel hätten wir gerne $(5-3)(5+3)$.
Dies erreichen wir durch Ausklammern von -1 aus der 1. Klammer.

$$(-5+3)(5+3) = -(5-3)(5+3) = -(5^2-3^2) = -(25-9) = -16$$

b) $(12+5)(-12+5) = -(12+5)(12-5) = -(12^2-5^2) = -(144-25) = -119$

c) $(a+b)(-a+b) = -(a+b)(a-b) = -(a^2-b^2) = -a^2+b^2$

d) $(-3x+4)(3x+4) = -(3x-4)(3x+4) = -((3x)^2-4^2) = -(9x^2-16) = -9x^2+16$

Diese Methode hilft auch bei dieser Aufgabe weiter:

$$(-a-b)(a+b)=?$$

Man klammert aus der ersten Klammer den Faktor (-1) aus:

$$(-a-b)=-(a+b)$$

Damit verändert sich die Berechnung so:

$$\mathbf{(-a-b)(a+b)=-(a+b)(a+b)=-(a+b)^2=-(a^2+2ab+b^2)=-a^2-2ab-b^2}$$

Beispiele

a) $(-x-4)(x+4)=-(x+4)(x+4)=-(x+4)^2=-(x^2+8x+16)=-x^2-8x-16$

b) $(-5a-2b)(2b+5a)=-(5a+2b)(2b+5a)=-(5a+2b)^2$
$=-(25a^2+20ab+4b^2)=-25a^2-20ab-4b^2$
Hier wurde verwendet: $(2b+5a)=(5a+2b)$, denn bei einer Summe darf man die Summanden vertauschen !

c) $(12rs+8r)(-8r-12rs)=-(8r+12rs)(8r+12rs)=-(8r+12rs)^2$
$=-((8r)^2+2\cdot 8r\cdot 12rs+(12rs)^2)=-(64r^2+192r^2s+144r^2s^2)$
$=-64r^2-192r^2s-144r^2s^2$
Hier wurde zuerst die erste Summe vertauscht und dann aus der 2. Klammer -1 ausgeklammert.

Auch diese Aufgabe ist so zu behandeln:

$$(-a+b)(a-b)=?$$

Man muss erkennen, dass die Vorzeichen in der ersten Klammer genau umgekehrt sind zu denen in der zweiten Klammer. Also ändern wir dies, indem wir aus der 1. Klammer -1 ausklammern:

$$\mathbf{(-a+b)(a-b)=-(a-b)(a-b)=-(a-b)^2=-(a^2-2ab+b^2)=-a^2+2ab-b^2}$$

Beispiele

a) $(3-5a)(-3+5a)=-(3-5a)(3-5a)=-(3-5a)^2=-(9-30a+25a^2)$
$=-9+30a-25a^2$

b) $(4u-7v)(7v-4u)=-(4u-7v)(-7v+4u)=-(4u-7v)(4u-7v)$
Nun muss man wissen, dass $-7v+4u=4u-7v$ ist, denn auch hier liegt eine Summe vor, in der man die Summanden vertauschen darf. Das Minuszeichen zeigt also keine Differenz sondern ein Vorzeichen an.
$=-(4u-7v)^2=-(16u^2-56uv+49v^2)=-16u^2+56uv-49v^2$

c) $(15a-25b)(25b-15a)=-(15a-25b)\cdot(-25b+15a)$

$=-(15a-25b)\cdot(15a-25b)=-(15a-25b)^2=-(225a^2-750ab+625b^2)$

$=-225a^2+750ab-625b^2$

d) $(12uv-4v)(-12uv+4v)=-(12uv-4v)(12uv-4v)=-(12uv-4v)^2$

$=-(144u^2v^2-96uv^2+16v^2)=-144u^2v^2+96uv^2-16v^2$

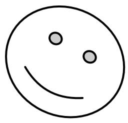
Es gibt eine vierte Aufgabenstellung, die so bearbeitet werden kann:

$$(-a-b)^2=?$$

Dies heißt ausführlich: $(-a-b)(-a-b)$

Aus jeder Klammer ziehen wir den Faktor (-1) hera[illegible]. Dieser kommt [illegible]n zweimal vor die Klammer, und weil $(-1)\cdot(-1)=+1$ [illegible]st, fällt dies wied[illegible] weg, also gilt:

$\boxed{(-a-b)^2=(a+b)^2 \text{ !!! } [illegible]^2+2ab[illegible]}$



Beispiele

a) $(-3x-6)^2=(3x+6)^2=9x^2+$ [illegible]

b) $(-5x-2x^2)^2=(5x+$ [illegible] $=25x^2+2$ [illegible] $+4x^4$

c) $(-13ab-5c)(-$ [illegible] $b-5c)=($ [illegible] $ab+5c)^2=$ [illegible] $9a^2b^2+130abc+25c^2$

[illegible]ining[illegible]fg[illegible] 4 (ganz wichtig!)

Forme [illegible]se Terme durch [illegible]sklammern von -1 um und wende dann binomische Formeln [illegible]

a) [illegible] $-5s)(-2r$ [illegible] $s)$

b) $(4a+2b)(-4a-2b)$

c) $(-5x$ [illegible] $x-3)$

d) $(x^2+5)(-x^2+5)$

e) $(-2ab-3)^2$

f) $(-ab+bc)^2$

g) $(-5x^2+2x)(2x-5x^2)$

h) $(6a-5b)(-5b-6a)$

i) $(-2b-5a)(5b-2a)$

j) $(-3a^2b+2b^2a)(-2b^2a-3a^2b)$

k) $(-2z-3w)(-2z+3w)$

l) $(-ab+ba)(ab-ba)$

6.6 Vermischte Aufgaben

Hier nochmals die drei binomischen Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

und die Minuszeichenregeln

$$(a-b) = -(b-a)$$
$$(-a-b) = -(a+b)$$
$$(-a-b)^2 = (a+b)^2$$

Trainingsaufgabe 5

Wende die geeigneten Formeln an:

(a)	$(3m+8n)(3m-8n)$	(b)	$\left(\frac{1}{2}x-5\right)^2$
(c)	$(3x+4)^2$	(d)	$(7u+2v)(2v-7u)$
(e)	$(4a-7b)(-4a$ [illegible] $b)$	(f)	$(-8x+2y)^2$
(g)	$($[illegible]$2y)(-$[illegible]$+8x)$	(h)	$(17a-b)(-17a-b)$
(i)	$(-16$ [illegible] $u)^2$	(j)	$(-65a+15a)^2$
(k)	$(6x^2-3x)(3x-6x^2)$	(l)	$(-5x+2)(2-5x)$
(m)	$(12x+3w)(-12x-3w)$	(n)	$(-8uv+3vw)(-8uv-3vw)$
(o)	$(-2pc-15rst)^2$	(p)	$(-z+3w)^2$

Hier nochmals zusammengestellt die Aufgaben 1 bis 4

(als Übungsblatt zum Wiederholen)

Trainingsaufgabe 1

(a) $(m+n)^2$ (b) $(3a+4b)^2$ (c) $(7x+15)^2$

(d) $(5c+6d)^2$ (e) $(15x+4y)^2$ (f) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)^2$

(g) $\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2$ (h) $\left(8b+\frac{1}{16}a\right)^2$ (i) $\left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)^2$

Trainingsaufgabe 2

(a) $(5a-c)^2$ (b) $(7a-2b)^2$ (c) $(20x-25)^2$

(d) $(ab-4)^2$ (e) $(-2-4a)^2$ (f) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b\right)^2$

(g) $\left(4x-\frac{1}{4}\right)^2$ (h) $\left(\frac{1}{4}u-\frac{3}{4}v\right)^2$ (i) ([illegible]$x^2-6)^2$

Trainingsaufgabe 3

(a) $(c-d)(c+d)$ (b) (3[illegible]$a+2b)$ (c) $(5x+1)(5x-1)$

(d) $\left(4a-\frac{1}{2}\right)\left(4a+\frac{1}{2}\right)$ (e) $(a^2-$[illegible]$^2+b)$ (f) $(4-x^2)(x^2+4)$

(g) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\left(\frac{1}{2}x-3\right)$ (h) $(-8u-v)($[illegible]$u+v)$ (i) $(6+2x)(-6+2x)$

Trainingsaufgabe 4 (ganz wichtig !)

Forme diese Terme durch [illegible] um und wende dann binomische Formeln an.

a) ([illegible]$r-5s)(-2r$[illegible]) b) $(4a+2b)(-4a-2b)$

c) $(-5x-3)(5x-3$[illegible] d) $(x^2+5)(-x^2+5)$

e) ([illegible]$b-3)^2$ f) $(-ab+bc)^2$

g) $(-5x$[illegible]$x)($[illegible]$-5x^2)$ h) $(6a-5b)(-5b-6a)$

i) $(-2b-5a)$[illegible]$5b-2a)$ j) $(-3a^2b+2b^2a)(-2b^2a-3a^2b)$

k) $(-2z-3w)(-2z+3w)$ l) $(-ab+ba)(ab-ba)$

Lösungen der Aufgaben

Im Originaltext auf der Mathe-CD.